

Partiel, 27.02.26
(Q.Gazda & S.Alloun)

Toutes les réponses doivent être justifiées. Passer du temps sur la bonne rédaction d'un argument est préférable à vouloir répondre à toutes les questions. Vous pouvez utiliser les résultats des questions précédentes même si vous ne les avez pas traitées.

EXERCICE 1.

Soit K un corps de nombres de degré n . Notez $\Delta_K \in \mathbb{Z}$ le discriminant de K .

(1) Soit $P(X) := X^3 - aX + b$, où $a, b \in \mathbb{Z}$, un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.

(1,a) Montrez que P a au moins une racine réelle α .

(1,a) $P(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ et $P(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$, donc le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une racine α de P dans \mathbb{R} .

Jusqu'à (1,f) supposez que $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

(1,b) Montrez que $\text{disc}(1, \alpha, \alpha^2) = 4a^3 - 27b^2$.

(1,b) $\text{Tr}_{K|\mathbb{Q}}(\alpha) = 3$ et en regardant le deuxième coefficient de P on obtient $\text{Tr}_{K|\mathbb{Q}}(\alpha) = 0$. Comme $\alpha^3 = a\alpha - b$ et $\alpha^4 = a\alpha^2 - b\alpha$, il reste à calculer la trace de α^2 . Pour cela on calcule la trace de la matrice de la multiplication par α^2 dans la base $(1, \alpha, \alpha^2)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -b & 0 \\ 0 & a & -b \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

D'où $\text{Tr}_{K|\mathbb{Q}}(\alpha^2) = 2a$. Finalement

$$\text{disc}(1, \alpha, \alpha^2) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2a \\ 0 & 2a & -3b \\ 2a & -3b & 2a^2 \end{vmatrix} = 3(4a^3 - 9b^2) + 2a(-4a^2) = 4a^3 - 27b^2$$

(1,c) Montrez que Δ_K est de même signe que $\text{disc}(1, \alpha, \alpha^2)$.

(1,c) Cela découle immédiatement de l'égalité $\text{disc}(1, \alpha, \alpha^2) = \#(\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}[\alpha])^2 \Delta_K$ qui est valide car $(1, \alpha, \alpha^2)$ est une \mathbb{Q} -base de K (ou de façon équivalente $\mathbb{Z}[\alpha] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\alpha) = K$) et $\mathbb{Z}[\alpha] \subset \mathcal{O}_K$ car α est entier algébrique.

(1,d) Montrez que si $a = 1$ et $b = -1$ alors P est bien irréductible et que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$.

(1,d) Comme il est de degré 3, si P était réductible alors P aurait une racine dans \mathbb{Z} mais $P \pmod 2$ n'a pas de racine dans \mathbb{F}_2 . D'après (1,d), $\text{disc}(1, \alpha, \alpha^2) = -23$ et donc $\#(\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}[\alpha])^2$ divise 23 qui est un nombre premier donc $\#(\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}[\alpha]) = 1$.

Supposez en plus que K est galoisien, c'est-à-dire que pour tout $\sigma : K \rightarrow \mathbb{C}$, $\sigma(K) = K$.

(1,e) Montrez que les trois racines de P sont réelles.

(1,e) L'ensemble $\{\sigma(\alpha) | \sigma : K \rightarrow \mathbb{C}\}$ est l'ensemble des racines de P , et par hypothèse il est inclus dans $K = \mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{R}$. D'où le résultat.

(1,f) Montrez que $\Delta_K > 0$.

(1,f) Le tableau de variations de la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto P(t)$ indique que : $a > 0$, la fonction a un maximum local > 0 en $-\sqrt{a/3}$ et un minimum local < 0 en $\sqrt{a/3}$. On en déduit les deux relations $P(\sqrt{a/3}) < 0$ et $P(-\sqrt{a/3}) > 0$ qui donnent

$$\frac{2a}{3} \sqrt{\frac{a}{3}} > \pm b$$

c'est-à-dire $4a^3 - 27b^2 > 0$ et on conclut avec (1,d).

(2) Supposez maintenant que K est de degré n impair et galoisien.

(2,a) À partir du cours, donnez une façon de calculer Δ_K pour montrer qu'il existe $x \in K$ tel que $\Delta_K = x^2$.

(2,a) Si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est une base de \mathcal{O}_K et $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ les plongements de K dans \mathbb{C} alors

$$\Delta_K = (\det(\sigma_i(\alpha_j))_{1 \leq i, j \leq n})^2$$

et l'hypothèse d'être galoisien implique que le déterminant est un élément de K .

(2,b) Montrez que $x \in \mathbb{Z}$. (*Indication : Considérez le corps $\mathbb{Q}(x) \subset K$*)

(2,b) Si $x \notin \mathbb{Q}$ alors $\mathbb{Q}(x)$ est un corps de nombres de degré 2 inclus dans K donc $2|n$: absurde. Par conséquent $x \in \mathbb{Q}$. Enfin $\Delta_K \in \mathbb{Z}$ implique que x est un entier algébrique, et donc ici un entier $\in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 2. NOMBRES DE PISOT-VIJAYARAGHAVAN.

Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire irréductible et $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d$ ses racines ; notez $\theta := \theta_1$. On dit que θ est un nombre de Pisot-Vijayaraghavan si $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta > 1$ et si pour tout $i \in \{2, \dots, d\}$, $|\theta_i| < 1$.

(1) Soient θ un nombre de Pisot-Vijayaraghavan et $K := \mathbb{Q}(\theta)$.

(1,a) Exprimez $\text{Tr}_{K|\mathbb{Q}}(\theta^n)$ en fonction de θ et de $\theta_2, \dots, \theta_d$.

(1,a) Je numérote les plongements de K pour avoir $\sigma_i(\theta) = \theta_i$. Et donc

$$\text{Tr}_{K|\mathbb{Q}}(\theta^n) = \sigma_1(\theta^n) + \dots + \sigma_d(\theta^n) = \sigma_1(\theta)^n + \dots + \sigma_d(\theta)^n = \theta^n + \theta_2^n + \dots + \theta_d^n$$

(1,b) Montrez qu'il existe une suite d'entiers $(t_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$\theta^n - t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

(1,b) Pour tout n , θ^n est un entier algébrique donc pour tout n , $\text{Tr}_{K|\mathbb{Q}}(\theta^n) \in \mathbb{Z}$. Par ailleurs on a

$$|\theta^n - \text{Tr}_{K|\mathbb{Q}}(\theta^n)| \leq |\theta_2|^n + \dots + |\theta_d|^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

(2) Soit $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or. Notez $K := \mathbb{Q}(\varphi)$.

(2,a) Montrez que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\varphi]$ et que φ est un nombre de Pisot-Vijayaraghavan.

(2,a) La première égalité est vraie car $5 \equiv 1 \pmod{4}$. C'est un nombre de Pisot-Vijayaraghavan car $\varphi > 1$ et que l'autre racine de son polynôme minimal est $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et que $|\frac{1-\sqrt{5}}{2}| < 1$.

(2,b) Déduisez-en que la suite $(F_n)_{n \geq 0}$ définie par $F_0 = 2$, $F_1 = 1$ et la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ vérifie $F_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \varphi^n$.

(2,b) D'une part l'équation $\varphi^2 = \varphi + 1$ implique que pour tout n ,

$$\mathrm{Tr}_{K|\mathbb{Q}}(\varphi^{n+2}) = \mathrm{Tr}_{K|\mathbb{Q}}(\varphi^{n+1}) + \mathrm{Tr}_{K|\mathbb{Q}}(\varphi^n)$$

d'autre part $\mathrm{Tr}_{K|\mathbb{Q}}(\varphi) = 1$ et $\mathrm{Tr}_{K|\mathbb{Q}}(1) = 2$. Finalement on conclut avec le calcul fait en (1,b).

(3) Revenez à la question (1,d) de l'EXERCICE 1. Montrez que le polynôme $X^3 - X - 1$ possède une seule racine réelle et que cette racine est un nombre de Pisot-Vijayaraghavan.

(3) $\Delta_K = -23 < 0$ donc $P(X) = X^3 - X - 1$ a deux racines complexes non réelles, elles sont donc nécessairement conjuguées l'une de l'autre : je les note z, \bar{z} . Par ailleurs $P(1) < 0$ donc la racine réelle α est > 1 . Finalement $|z|^2|\alpha| = |N_{\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}}(\alpha)| = 1$ donc $|z| < 1$. D'où le résultat.

On l'appelle **nombre plastique** et Carl Siegel a démontré que c'est le plus petit nombre de Pisot-Vijayaraghavan. Le nombre plastique vaut exactement

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18}}$$

PROBLÈME : L'APPROXIMATION DES RACINES CARRÉES.

Un des plus anciens problèmes mathématiques est celui de l'approximation des racines carrés par des rationnels.

Soit $d > 1$ un entier sans facteur carré. Dans la suite $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subset \mathbb{R}$.

(1) Soient $x, y \in \mathbb{Q}$. Calculez $N_{K|\mathbb{Q}}(x + y\sqrt{d})$.

(1) La norme est le produit des conjugués donc $N_{K|\mathbb{Q}}(x + y\sqrt{d}) = (x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2$.

(2) Soit $u := x + y\sqrt{d} \in \mathcal{O}_K$ tel que $x, y \in \mathbb{Z}$ et $N_{K|\mathbb{Q}}(u) = \pm 1$.

Notez $u^n = x_n + y_n\sqrt{d}$, où $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$.

(2,a) Démontrez que pour tout n ,

$$x_n, y_n \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad x_n \wedge y_n = 1$$

(2,a) Le fait que les x_n, y_n sont des entiers découle du fait que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est un sous-anneau de \mathcal{O}_K . Par ailleurs pour tout n , on a une identité de Bézout

$$x_n^2 - dy_n^2 = N_{K|\mathbb{Q}}(u^n) = N_{K|\mathbb{Q}}(u)^n = \pm 1$$

qui implique que $x_n \wedge y_n = 1$.

(2,b) Montrez que si $|y_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ alors

$$\frac{|x_n|}{|y_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{d}$$

(2,b) L'égalité $x_n^2 - dy_n^2 = \pm 1$ se réécrit

$$\left(\frac{x_n}{y_n}\right)^2 - d = \frac{\pm 1}{y_n^2}$$

D'où le résultat.

(3) Donnez une bonne approximation de $\sqrt{2}$ par une fraction irréductible a/b .

(3) Soit $u := 1 + \sqrt{2}$. Pour calculer les puissances de u on utilise le système linéaire découlant de $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})(x_n + y_n\sqrt{2})$:

$$x_{n+1} = x_n + 2y_n$$

$$y_{n+1} = x_n + y_n$$

Autrement dit on applique successivement l'opération $(X, Y) \mapsto (X + Y + Y, X + Y)$ à partir du couple $(1, 1)$. Par exemple au bout de la septième opération on obtient

$$\sqrt{2} \simeq \frac{577}{408}$$

On peut aussi parcourir plus rapidement les approximations au prix de calculs plus coûteux. En posant $\xi_n := x_{2^n}$ et $\eta_n := y_{2^n}$, on a le système non-linéaire pour $n \geq 1$:

$$\xi_{n+1} = 2\xi_n^2 - 1$$

$$\eta_{n+1} = 2\xi_n\eta_n$$

Autrement dit on applique successivement l'opération $(X, Y) \mapsto (2X^2 - 1, 2XY)$ à partir du couple $(\xi_1, \eta_1) = (x_2, y_2) = (3, 2)$.

(4) À votre avis, dites comment le mathématicien Brahmagupta (598-670) faisait pour trouver une suite d'approximations de $\sqrt{61}$ à partir de l'égalité

$$9 \cdot 169 - 61 \cdot 25 = -4$$

(4) L'égalité permet de dire que $N_{\mathbb{Q}(\sqrt{61})|\mathbb{Q}}(39 + 5\sqrt{61}) = -4$ et donc que

$$N_{\mathbb{Q}(\sqrt{61})|\mathbb{Q}}\left(\frac{39}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{61}\right) = -1$$

Il suffit donc de considérer l'élément $u = \frac{39}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{61}$ et ses puissances successives.

La meilleure approximation qu'il avait trouvée donnait

$$\sqrt{61} \simeq \frac{1766319049}{226153980}$$